Exercice 1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ...

1 – Montrons que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors il existe $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tq :

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre $\in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ qui lui est associé. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|x_i| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Comme $x \neq 0$, alors nécessairement $x_i \neq 0$.

On a $Ax = \lambda x$, d'où $(Ax)_i = \lambda x_i$, i.e

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

D'où $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$. Ainsi, on a

$$|\lambda - a_{ii}| \, |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \, |x_j| \leq \underbrace{\|x\|_\infty}_{|x_i|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

et comme $x_i \neq 0$, alors on obtient

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

2 – $Sp(A)$: l'ensemble des valeurs propres de A. Montrons que

$$Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; \, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Soit $\lambda \in Sp(A)$. Alors il existe, d'après 1–, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| .$$

Et par suite $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \, ; \, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$. Ce qui prouve le résultat souhaité.

(suite exercice 1)

3 – On dit que la matrice A est à diagonale dominante stricte, si

$$(*) \qquad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \forall i = 1 \text{ à } n .$$

Montrons que si A est à diagonale dominante stricte, alors A est inversible.

Supposons que A n'est pas inversible. Alors 0 est une valeur propre de A.

Il s'en suit, d'après 1–, qu'il existe $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tel que $|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Ce qui contredit le fait que A est à diagonale dominante stricte. Ainsi A est nécessairement inversible.

4 – On considère le système linéaire :

$$(S) \qquad Ax = b$$

où $b \in \mathbb{C}^n$. On suppose que A est à diagonale dominante stricte (donc A est inversible)

On veut résoudre le système (S) par la méthode itérative de Jacobi :

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$D\, x^{(k+1)} = (E+F)\, x^{(k)} + b .$$

La matrice J de la méthode de Jacobi est donnée par

$$J = D^{-1}(E+F).$$

4-a Calculons la matrice J.

On a $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$; $\forall i, a_{ii} \neq 0$, puisque A est à diagonale dominante stricte, car sinon il existe i_0 tq $a_{i_0 i_0} = 0$ et donc d'après $(*)$, on a $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ $a_{i_0 j} = 0 \Rightarrow A$ n'est pas inversible, Absurde d'après la question 3–.

$$E+F = \begin{pmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$; $J_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

4-b On a :

$$\|J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}| \overset{J_{ij}=0 \text{ pour } i=j}{=} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Comme A est à diagonale dominante stricte, alors : $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $\forall i \geq 1$.

D'où $\|J\|_\infty < 1$. Ce qui prouve que la méthode de Jacobi est convergente. ∎

EXERCICE 2

On considère le système linéaire $Ax=b$, qu'on se propose de résoudre numériquement.

Etudions la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel dans les deux cas suivants.

$A = D - E - F$

1er cas : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

__Jacobi__ : $J = D^{-1}(E+F)$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de J.

$$P_\lambda(J) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2) + 2\lambda + 4 - 2(2 + 2\lambda) = -\lambda^3$$

Ainsi $Sp(J) = \{0\}$. Il s'en suit que $\rho(J) = 0 < 1$. Ainsi la méthode itérative de Jacobi __converge__.

__Gauss-Seidel__ : $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$

$D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $Sp(\mathcal{L}_1) = \{0, 2, 2\}$. D'où

$$\rho(\mathcal{L}_1) = 2 > 1,$$

et par suite la méthode de Gauss-Seidel __diverge__.

2ème cas : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

__Jacobi__ : $J = D^{-1}(E+F)$

$$J = \frac{1}{2} I \times \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de J.

$$P_\lambda(J) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)$$

$$= -\lambda^3 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda = -\lambda^3 - \frac{1}{2}$$

$P_\lambda(J) = -\lambda^3 - \frac{1}{2}$. Ainsi $\rho(J)$ est tel que $(\rho(J) = |\lambda|)$ $|\rho(J)|^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow |\rho(J)| = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$.

Ainsi la méthode itérative de Jacobi __converge__.

__Gauss-Seidel__ : $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$

$(D - E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ainsi $Sp(\mathcal{L}_1) = \{0, -\frac{1}{2}\}$. D'où

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \frac{1}{2} < 1,$$

et par suite la méthode de Gauss-Seidel __converge__.

EXERCICE 3

On considère le système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad b : \text{quelconque.}$$

Etudions la convergence des méthodes de Jacobi et de relaxation.

$$A = D - E - F\,; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,; \quad F \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Jacobi</u> : $J = D^{-1}(E+F)$; $D = I$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,; \quad \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2)$$

Ainsi $Sp(J) = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. D'où $\rho(J) = \sqrt{2} > 1$. Et par suite, la méthode de Jacobi diverge.

<u>Relaxation</u> : $\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$. On sait déjà, que si $\omega \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$, alors la méthode de relaxation diverge. Etudions alors la convergence pour $\omega \in]0,2]$.

On a : $D = I$; et

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega E)((1-\omega)I + F)\,; \quad I - \omega E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega & 1 & 0 \\ \omega & \omega & 1 \end{pmatrix}\,; \quad (I - \omega E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\omega & 1 & 0 \\ \omega^2 - \omega & -\omega & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1-\omega)I + \omega F = \begin{pmatrix} 1-\omega & -2\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix}\,; \quad \mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\omega & 1 & 0 \\ \omega^2 - \omega & -\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\omega & -2\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} 1-\omega & -2\omega & 0 \\ -\omega(1-\omega) & 2\omega^2 + 1 - \omega & 0 \\ (\omega^2 - \omega)(1-\omega) & -2\omega(\omega^2 - \omega) - \omega(1-\omega) & 1-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\omega & -2\omega & 0 \\ \omega(\omega-1) & 2\omega^2 + 1 - \omega & 0 \\ -\omega(\omega-1)^2 & \omega(\omega-1)(-2\omega+1) & 1-\omega \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(\mathcal{L}_\omega) = (1 - \omega - \lambda) \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & -2\omega \\ \omega(\omega-1) & 2\omega^2 + 1 - \omega - \lambda \end{vmatrix} = (1-\omega-\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1 - \omega^2) + (1-\omega)^2\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2 + 2\lambda(\omega - 1 - \omega^2) + (1-\omega)^2 = 0 \\ &\Delta' = (\omega - 1 - \omega^2)^2 - (1-\omega)^2 \\ &\Delta' = \omega^2(\omega^2 - 2\omega + 2) > 0 \ \ \forall \omega \neq 0 \end{aligned}}$$

$$Sp(\mathcal{L}_\omega) = \left\{1-\omega;\ \omega^2 - \omega + 1 - \omega\sqrt{\omega^2 - 2\omega + 2},\ \omega^2 - \omega + 1 + \omega\sqrt{\omega^2 - 2\omega + 2}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(\mathcal{L}_\omega) = \omega^2 - \omega + 1 + \omega\sqrt{\omega^2 - 2\omega + 2}$$

* $\omega = 2$: $\rho(\mathcal{L}_2) = 3 + 2\sqrt{2} > 1$: la méthode de relaxation diverge.

* $0 < \omega < 2$: $\rho(\mathcal{L}_\omega) - 1 = \omega^2 - \omega + \omega\sqrt{\omega^2 - 2\omega + 2} = \omega^2 + \omega\left(\underbrace{\sqrt{\omega^2 - 2\omega + 2}}_{=\sqrt{(\omega-1)^2 + 1}} - 1\right) > 0$

$\Rightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) > 1$,

et par suite la méthode de relaxation diverge.

Conclusion : $\forall \omega \in \mathbb{R}^*$, la méthode de relaxation diverge.

EXERCICE 4

On considère le système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 – Solution exacte par la <u>méthode de Gauss</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} x_3 = 4 \\ \frac{3}{2} x_2 - x_3 = 9/2 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = 6 \end{array} \qquad x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} : \text{solution.}$$

2 – <u>Méthode de Jacobi</u>: $J = D^{-1}(E+F)$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E^T.$$

$$J = \frac{1}{2} I \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$D x^{(k+1)} = (E+F) x^{(k)} + b \quad ; \quad x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F) x^{(k)} + D^{-1} b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \frac{1}{2} b.$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad x^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15/2 \\ 5 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 5/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15/4 \\ 5/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 18/4 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19/2 \\ 22/4 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{22}{8} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/4 \\ 11/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19/4 \\ 22/8 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 22/8 \\ 26/4 \\ 11/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 39/4 \\ 30/4 \\ 15/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39/8 \\ 30/8 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

$$x^{(5)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39/8 \\ 30/8 \\ 15/8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 30/ \\ 54/ \\ 30/ \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 86/8 \\ 62/8 \\ 38/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.375 \\ 3.875 \\ 2.375 \end{pmatrix}$$

ouf!

(suite exercice 4)

3 _ Méthode de Gauss _ Seidel : $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$;

$$(D-E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad (D-E)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1} F\, x^{(k)} + (D-E)^{-1} b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} x^{(k)} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} x^{(k)} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} \quad ; \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/4 \\ 13/8 \end{pmatrix} ;$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/2 \\ 9/4 \\ 13/8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9/4 \\ 22/8 \\ 22/16 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 37/4 \\ 58/8 \\ 74/16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 37/8 \\ 58/16 \\ 74/32 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37/8 \\ 58/16 \\ 74/32 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 58/16 \\ 132/32 \\ 132/64 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 170/16 \\ 276/32 \\ 340/64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170/32 \\ 276/64 \\ 340/128 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 170/32 \\ 276/64 \\ 340/128 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 276/64 \\ 616/128 \\ 616/256 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 724/64 \\ 1192/128 \\ 1448/256 \end{pmatrix}$$

$$x^{(5)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 724/128 \\ 1192/256 \\ 1448/512 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1192/256 \\ 2640/512 \\ 2640/1024 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 9/2 \\ 13/4 \end{pmatrix}$$

$$x^{(5)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2984/256 \\ 4944/512 \\ 5968/1024 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.828 \\ 4.828 \\ 2.914 \end{pmatrix}$$

(suite exercice 4)

4 – Méthode de sur-relaxation : $(\omega > 1)$

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le paramètre optimal de sur-relaxation :

Soit J la matrice de la méthode de Jacobi :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

$P_\lambda(J) = \det(J - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{2} = \lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right)$. Et par suite, on a

$$Sp(J) = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad ; \quad \rho(J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Ainsi toutes les valeurs propres de J sont réelles et de valeur absolue strictement < 1.

Par ailleurs, la matrice A est tridiagonale. utilisant un résultat de cours, le paramètre optimal de sur-relaxation ω_0 est donné par :

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J))^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \simeq 1.1715 \simeq 1.2$$

$\omega_0 = 1.2$

$$\mathcal{L}_{\omega_0} = \left(\frac{1}{1.2} D - E\right)^{-1} \left(\frac{0.2}{1.2} D + F\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{Calcul !}$$

EXERCICE 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $Ax = b$, où b est qc et où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}. \qquad A \text{ est symétrique}$$

1 — cherchons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A est définie positive.

$$P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda+2\alpha & 1-\lambda+2\alpha & 1-\lambda+2\alpha \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda-\alpha \end{vmatrix}$$

$$P_\lambda(A) = (1-\lambda+2\alpha)(1-\lambda-\alpha)^2$$

$$Sp(A) = \{ 1+2\alpha, 1-\alpha \}.$$

Ainsi A est définie positive, SSI $1+2\alpha > 0$ <u>et</u> $1-\alpha > 0$. Et par suite A est définie positive, SSI $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[$.

2 — On a, pour tout $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[$, la matrice A est symétrique définie positive.

Il s'en suit, grâce à un résultat de cours, que la méthode de relaxation est convergente pour $\omega \in]0, 2[$.

3 — $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F)$; $D = I$; $E + F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. cherchons les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Jacobi est convergente.

La méthode de Jacobi converge $\Longleftrightarrow \rho(\mathcal{J}) < 1$; or $\rho(\mathcal{J}) = 2|\alpha|$.

D'où:

La méthode de Jacobi converge $\Leftrightarrow 2|\alpha| < 1 \Leftrightarrow \alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

4 — $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F$: matrice de la méthode de Gauss-Seidel

$$D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2-\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(suite exercice 5)

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2-\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha^3 & -\alpha(\alpha^2-\alpha)+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-2\alpha \end{pmatrix} = -\alpha\, \tilde{\mathcal{L}}_1 .$$

Calculons $\rho(\mathcal{L}_1) = |\alpha|\, \rho(\tilde{\mathcal{L}}_1)$. Pour cela, calculons les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}_1$.

$$P_\lambda(\tilde{\mathcal{L}}_1) = \det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-\lambda & 1-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha(\alpha-2)-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\alpha-\lambda & 1-\alpha \\ \alpha^2-\alpha & \alpha(\alpha-2)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_\lambda(\tilde{\mathcal{L}}_1) = -\lambda \left[-(\alpha+\lambda)(\alpha(\alpha-2)-\lambda) - (1-\alpha)(\alpha^2-\alpha) \right]$$

$$= -\lambda \left[-(\alpha+\lambda)(\alpha^2-2\alpha-\lambda) - \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 - \alpha^2 \right]$$

$$= -\lambda \left[-\cancel{\alpha^3} + \cancel{2\alpha^2} + \alpha\lambda - \lambda\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2 - \cancel{\alpha^2} + \alpha + \cancel{\alpha^3} - \cancel{\alpha^2} \right]$$

$$= -\lambda \left[3\alpha\lambda - \lambda\alpha^2 + \lambda^2 + \alpha \right]$$

$$P_\lambda(\tilde{\mathcal{L}}_1) = -\lambda \left[\lambda^2 + (3\alpha-\alpha^2)\lambda + \alpha \right].$$

<u>Résolution de l'équation</u> : $\lambda^2 + (3\alpha-\alpha^2)\lambda + \alpha = 0$

$$\Delta = (3\alpha-\alpha^2)^2 - 4\alpha = \alpha\left(\alpha(3-\alpha)^2-4\right) = \alpha\left[\alpha(9+\alpha^2-6\alpha)-4\right] = \alpha(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha+4)$$

$$\Delta = \alpha(\alpha-1)^2(\alpha-4)$$

<u>1er cas</u> : $\Delta \geq 0$ pour $\alpha \in\,]-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [4,+\infty[$; $\sqrt{\Delta} = |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}$

$$Sp\{\tilde{\mathcal{L}}_1\} = \left\{ 0,\ \frac{(\alpha^2-3\alpha) + |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}}{2},\ \frac{(\alpha^2-3\alpha) - |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}}{2} \right\}.$$

On a alors $\rho(\mathcal{L}_1) = |\alpha|\, \rho(\tilde{\mathcal{L}}_1) = \dfrac{|\alpha|}{2} \left| (\alpha^2-3\alpha) + |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)} \right|$

<u>2ème cas</u> : $\Delta < 0$ pour $\alpha \in\,]0,4[\, \setminus \{1\}$

$$Sp\{\tilde{\mathcal{L}}_1\} = \left\{ 0,\ \frac{1}{2}\left[(\alpha^2-3\alpha) \pm i\,|\alpha-1|\sqrt{-\alpha(\alpha-4)} \right] \right\}$$

$$\left[\rho(\tilde{\mathcal{L}}_1)\right]^2 = \frac{1}{4}\left[(\alpha^2-3\alpha)^2 + (\alpha-1)^2\alpha(4-\alpha) \right] = \frac{1}{4}\left[\alpha^2(\alpha^2-6\alpha+9) + (\alpha^2-2\alpha+1)(4\alpha-\alpha^2) \right]$$

D'où $\left[\rho(\tilde{\mathcal{L}}_1)\right]^2 = \alpha \Rightarrow \rho(\tilde{\mathcal{L}}_1) = \sqrt{\alpha}$ (ici α est >0).

Et par suite $\rho(\mathcal{L}_1) = \alpha\sqrt{\alpha}$.

(suite exercice 5)

Ainsi on a :

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{2} \left| \underbrace{(\alpha^2-3\alpha) + |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}}_{\geq 0} \right| & ; \text{ si } \alpha \in]-\infty,0] \cup \{1\} \cup [4,+\infty[\\ \alpha\sqrt{\alpha} & ; \text{ si } \alpha \in]0,4[\setminus \{1\} \end{cases}$$

5_ Cherchons les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi, i.e $\rho(\mathcal{L}_1) \leq \rho(J)$.

Calculons d'abord $\rho(J)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$; $P_\lambda(J) = \det(J-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix}$

$$P_\lambda(J) = \begin{vmatrix} -\lambda-2\alpha & -\lambda-2\alpha & -\lambda-2\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\lambda & 0 \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda+\alpha \end{vmatrix} = -(\lambda+2\alpha)(\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2\alpha)(\alpha-\lambda)(-\lambda+\alpha)$$

$P_\lambda(J) = -(\lambda+2\alpha)(\alpha-\lambda)^2$. D'où $Sp\{J\} = \{-2\alpha, \alpha\}$, et par suite, on a :

$$\rho(J) = 2|\alpha|.$$

La méthode de Jacobi est convergente ssi $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, et $\rho(J) = 2|\alpha|$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente, ssi $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$.

. Comparons les deux méthodes pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

On a :

<u>1^er cas</u> : $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0]$

$\rho(J) = 2|\alpha|$.

$\rho(\mathcal{L}_1) = \frac{|\alpha|}{2}\left[(\alpha^2-3\alpha) + |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}\right] < \frac{|\alpha|}{2}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right] = 2|\alpha| \; (<1)$

Ainsi pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0]$, on a $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$.

<u>2^ème cas</u> : $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$

$\rho(J) = 2|\alpha| = 2\alpha$

$\rho(\mathcal{L}_1) = \alpha\sqrt{\alpha} < \alpha\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\alpha = \rho(J)$.

<u>Conclusion</u> : Pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi. ■

Fin Série 5